

УДК 539.311(043.2)

М.А. Мартиненко, доктор фізико-математичних наук (НУХТ, Україна),
В.П. Мартиненко (НАУ, Україна)

ЗАДАЧА ПРО КРУЧЕННЯ ПРУЖНОЇ КУЛІ З КОНЦЕНТРИЧНИМ СФЕРИЧНИМ РОЗРІЗОМ

Розглянуто розв'язок задачі про напружений стан пружної кулі, послабленої концентричним сферичним розрізом при крученні. Загальний розв'язок для кулі і сферичної оболонки поданий у вигляді розкладу за функціями Лежандра і після виконання граничних умов, задача зводиться до парних рівнянь. Дано числовий аналіз коефіцієнта інтенсивності напружень в залежності від площі та глибини сферичного розрізу.

Розглянемо осесиметричну задачу теорії пружності про кручення однорідної пружної кулі радіуса R , послабленої концентричним сферичним розрізом по поверхні $S(r = r_0 < R, 0 \leq \theta \leq \theta_0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, r, \theta, \varphi$ – сферичні координати).

Єдину відмінну від нуля проекцію вектора переміщень $U_\varphi = U$ і компоненту тензора напружень $\tau_{r\varphi} = \tau$ в областях $V_1(r < r_0)$ і $V_2(r > r_0)$ можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} Gu_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n P_n^1(\cos \theta); \quad \tau_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (n-1) r^{n-1} P_n^1(\cos \theta), \\ Gu_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} (b_n r^n + c_n r^{-n-1}) P_n^1(\cos \theta); \\ \tau_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} [(n-1)b_n r^n - (n+2)c_n r^{-n-2}] P_n^1(\cos \theta), \end{aligned}$$

де a_n, b_n, c_n – нескінченні послідовності невідомих коефіцієнтів; G – модуль зсуву матеріалу кулі; $P_n^1(\cos \theta)$ – приєднанні функції Лежандра [3]. Після застосування до даної задачі принципу Бюкнера [4] одержимо наступні граничні умови:

$$\tau_2 = 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad r = R, \quad (1)$$

$$\tau_1 = \tau_2; \quad u_1 = u_2, \quad \theta_0 \leq \theta \leq \pi, \quad r = r_0, \quad (2)$$

$$\tau_1 = \tau_2 = f(\theta), \quad 0 < \theta < \theta_0, \quad r = r_0 \quad (3)$$

Умова (2) відповідає вимозі неперервності полів напружень і переміщень на поверхні кулі зовні розрізу, а відома функція $f(\theta)$ відповідає зусиллям, які перенесенні на поверхню розрізу за принципом Бюкнера. Задовольняючи граничні умови (1)–(3) одержимо парну систему рівнянь наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n r_0^n \beta^{-2n-1} \frac{n+1/2}{n+2} P_n^1(\cos \theta) &= 0, \quad \theta_0 \leq \theta \leq \pi, \quad \beta = \frac{r_0}{R}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n r_0^{n-1} \beta^{-2n-1} (n-1)(1-\beta^{2n+1}) P_n^1(\cos \theta) &= f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Розв'язок системи (4) будемо на основі розривної суми і інтегрального представлення [5, 6] наведених нижче:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1/2}{n(n+1)} \cos(n+1/2) t P_n^1(\cos \theta) &= -\frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} + \frac{\sin t H(t-\theta)}{\sin \theta \sqrt{2 \cos t - 2 \cos \theta}}; \\ \frac{n+1/2}{n(n+1)} P_n^1(\cos \theta) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\theta \frac{\sin x \sin(n+1/2)x}{\sin \theta \sqrt{2 \cos x - 2 \cos \theta}} dx; \end{aligned}$$

де $H(t - \theta)$ – функція Хевісайда.

Розв'язок парних рівнянь шукаємо у вигляді [6,7]

$$-b_n r^{n-1} \beta^{-2n-1} = \frac{n+2}{n(n+1)} \int_0^{\theta_0} \varphi(t) \cos(n + \frac{1}{2})t dt, \quad (5)$$

де $\varphi(t)$ – нова невідома функція, неперервна разом зі своєю першою похідною при $0 \leq t \leq \theta_0$.

При виконанні інтегральної умови $\int_0^{\theta_0} \varphi(t) \cos \frac{t}{2} dt = 0$, інтегральний оператор (5) тотожно задовольняє першому рівнянню системи (4). Після підстановки (5) у друге рівняння (4) приходимо до наступного рівняння Абеля:

$$\int_0^{\theta} \frac{\sin x \varphi(x)}{\sqrt{2 \cos x - 2 \cos \theta}} dx = \sin \theta f(\theta), \quad (6)$$

$$\text{де } \Phi(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\theta_0} \varphi(t) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)(n+2)}{n+1/2} (1-\beta^{2n+1}) \cos(n + \frac{1}{2})t \sin(n + \frac{1}{2})x \right] dt. \quad (7)$$

Застосовуючи до (6) формулу обернення інтегрального рівняння Абеля [7], одержимо

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi \sin x} \cdot \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(\theta) \sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{2 \cos \theta - 2 \cos x}} = F(x).$$

Зауважимо, що внутрішня сума в (7) знаходиться в замкнутому вигляді в класі узагальнених функцій, і в кінцевому результаті задача зводиться до наступного інтегродиференціального рівняння:

$$\varphi'(x) + \frac{9}{4} \int_0^x \varphi(t) dt + \int_0^{\theta_0} \varphi(t) K(t, x) dt = F(x), \quad (8)$$

де

$$K(t, x) = \frac{\beta(1-\beta^2)}{2\pi} \left\{ \frac{\sin \frac{x-t}{2} [1+4\beta^2 + \beta^4 + 2\beta^2 \cos(x-t)]}{[1-2\beta^2 \cos(x-t) + \beta^4]^2} + \right. \\ \left. + \sin \frac{x+t}{2} \cdot \frac{1+4\beta^2 + \beta^4 + 2\beta^2 \cos(x+t)}{[1-2\beta^2 \cos(x+t) + \beta^4]^2} \right\} - \\ - \frac{9}{4\pi} \left[\arctg\left(\frac{2\beta}{1-\beta^2} \sin \frac{x-t}{2}\right) + \arctg\left(\frac{2\beta}{1-\beta^2} \sin \frac{x+t}{2}\right) \right].$$

Компонента тензора напружень $\tau_{r\varphi}$ на поверхні кулі зовні розрізу визначається формулою

$$\sin \theta \tau_{r\varphi}(r_0, \theta) = \frac{-\sin \theta_0 \varphi(\theta_0)}{\sqrt{2 \cos \theta_0 - 2 \cos \theta}} + \int_0^{\theta_0} \frac{\sin x F(x) dx}{\sqrt{2 \cos x - 2 \cos \theta}} + \\ + \frac{\theta}{4} \sqrt{2 \cos \theta_0 - 2 \cos \theta} \int_0^{\theta_0} \varphi(t) dt + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin x dx}{\sqrt{2 \cos x - 2 \cos \theta}} \int_0^{\theta_0} \varphi(t) K(t, x) dt.$$

Коефіцієнт інтенсивності напружень знаходимо із граничної рівності [8]

$$k_3 = \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \tau_{r\varphi}(r_0, \theta) \sqrt{2r_0(\theta - \theta_0)} = -\frac{\varphi(\theta_0) \sqrt{r_0}}{\sqrt{\sin \theta_0}}.$$

Різниця переміщень на поверхнях розрізу визначається інтегралом

$$G(u_1 - u_2) = 2r_0 \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{\varphi(t) \sin t dt}{\sin \theta \sqrt{2 \cos \theta - 2 \cos t}}.$$

Дослідження полів напружень і переміщень в околі граничного кола сферичного розрізу проведемо в локальній полярній системі координат ρ, γ , яка показана на рисунку 1. Якщо скористатися одержаними наближеними значеннями приведених нижче сум

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1/2} \frac{(n+1/2)P_n^1(\cos \theta)}{n(n+1)} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta_0 \approx -\frac{\sqrt{r_0} \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\sqrt{2\rho \sin \theta_0}};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1/2} \frac{P_n^1(\cos \theta)}{n(n+1)} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta_0 \approx -\frac{\sqrt{2\rho} \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\sqrt{r_0 \sin \theta_0}} + c,$$

То для полів напружень і переміщень в околі розрізу отримаємо наступні асимптотичні вирази:

$$\tau_{r\varphi}^{(2)} \approx -\frac{k_3}{\sqrt{2\rho}} \sin \frac{\gamma}{2}; \quad Gu_{\varphi} \approx k_3 \sqrt{2\rho} \sin \frac{\gamma}{2} + c.$$

Приклад. Нехай переміщення точок кулі пропорційні їх віддалям до осі **OZ** і площини $\theta = \frac{\pi}{2}$. В цьому випадку права частина рівняння (8) приймає вигляд:

$$F(x) = \frac{8a}{5\pi} \sin \frac{5x}{2}; \quad a = -\alpha Gr_0,$$

де α – кут закручування на одиницю довжини. При $\beta = 0$ одержимо задачу про сферичний розріз в пружному просторі, яка розглядалася в [9,10]. Зауважимо, що в цих роботах відсутні числові результати, а також не приведені формули для визначення коефіцієнтів інтенсивності.

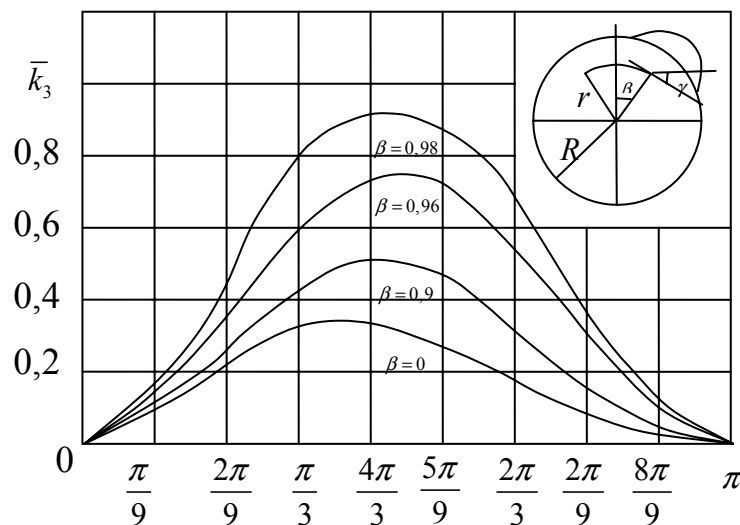


Рис.1. Залежність коефіцієнта інтенсивності напружень від кута розрізу. При $\beta = 0$ розв'язок рівняння (8) має вигляд

$$\varphi(x) = \frac{a}{\pi} \left[\frac{1}{3} (4 \cos \theta_0 - 1) \cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} \right],$$

а коефіцієнт інтенсивності визначається за формулою:

$$\overline{k_3} = -\frac{\pi k_3}{a\sqrt{r_0}} = \frac{2}{3}\sqrt{\sin \theta_0} \left(\sin \frac{\theta_0}{2} + \sin \frac{3\theta_0}{2} \right). \quad (9)$$

На рисунку представлена поведінка коефіцієнтів в залежності від кута θ_0 при $\beta = 0; 0,9; 0,96; 0,98$. Аналізуючи числові результати робимо висновок, що при $\beta < 0,6$, коефіцієнт інтенсивності можна розраховувати за формулою (9) і при цьому відносна похибка не перевищуватиме п'яти відсотків.

Висновки. На основі отриманого аналітичного розв'язку мішаної просторової задачі теорії пружності про кручення пружної кулі зі сферичною тріщиною проведений аналіз коефіцієнта інтенсивності напружень k_3 і дані практичні рекомендації щодо інженерної оцінки міцності пружних тіл методами лінійної механіки руйнування.

Список літератури

1. Улитко А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости.- Киев: Наук.думка, 1979.-264с.
2. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел.- М.: Физматгиз, 1963.- 686с.
3. Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций/Под.ред. С.В. Фомина.- М.: Мир,1952.- 476с.
4. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.- М.: Наука, 1966.- 707с.
5. Мартыненко М.А., Улитко А.Ф. Напряженное состояние вблизи вершины сферического разреза в неограниченной упругой среде//Прикл.механика,- 1978.- 14, №9.- 23с.
6. Мартыненко М.А. Решение парных уравнений по полиномам Лежандра первого порядка//Мат. физика.- 1979.- №26.- С.106-109.
7. Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики.- Л.: Наука, 1977.- 220с.
8. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.- Киев: Наук. думка, 1976.- 443с.
9. Уфлянд Я.С., Меленевская Е.С. Кручение упругого пространства ослабленного сферическим разрезом// Прикл. механика.- 1977.- 7, №2.- С.111-114.
10. Зюзин В.А., Смирнов С.А. Кручение упругого пространства ослабленного сферическим разрезом//Динамика и прочность тяжелых машин.- 1982.- №6.- С.173-179.